|  |
| --- |
| БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ |
| Факультет прикладной математики и информатики |
| Кафедра информационных систем управления |
| Лукьянович Александр Сергеевич  10 группа, 2 курс |
| Лабораторная работа |
|  |
|  |
| **Итерационные методы решения СЛАУ**    **Преподаватель**  *Полевиков Виктор Кузьмич* |
|  |
| Дата сдачи:  10.11.2016 |

Оглавление

[Постановка задачи 3](#_Toc466556997)

[Метод простых итераций: 4](#_Toc466556998)

[Метод релаксации: 4](#_Toc466556999)

[Краткая теория 5](#_Toc466557000)

[Листинг программы 7](#_Toc466557001)

[Результаты 9](#_Toc466557002)

# Постановка задачи

Рассматриваем следующую систему: , где – матрица коэффициентов общего вида, – вектор неизвестных, – вектор свободных значений.

=

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | -3.30 | -8.11 | 3.75 | 5.31 | 9.33 | 6.27 | 4.60 | -1.23 | -7.15 | 9.14 | | 6.29 | -5.17 | 8.38 | 9.52 | 7.11 | -3.25 | -5.27 | -6.29 | 0.29 | 3.31 | | 5.38 | -2.49 | 3.17 | 4.32 | -1.26 | -7.34 | -7.27 | 8.17 | -2.41 | -5.18 | | 5.16 | 7.15 | 0.27 | 2.35 | 1.30 | -3.14 | 6.11 | -3.18 | -5.31 | 2.29 | | -8.59 | 4.55 | -4.22 | -4.26 | -3.18 | -8.13 | 1.11 | 2.48 | 6.19 | -1.14 | | -6.16 | -1.24 | 6.33 | 1.18 | 4.59 | 2.23 | -8.33 | 9.18 | -8.91 | -9.68 | | 0.23 | -1.25 | 8.30 | -2.20 | 5.28 | -4.99 | 5.32 | 6.22 | 9.11 | 1.25 | | 2.13 | -4.12 | 9.16 | 7.70 | -4.25 | -8.24 | -6.21 | -4.25 | -4.18 | 8.92 | | 2.11 | 1.62 | 2.17 | 9.22 | 3.81 | 2.25 | -2.18 | 5.23 | -7.27 | -4.46 | | 6.18 | -9.55 | -3.61 | 7.16 | 1.28 | 8.76 | -4.60 | 6.20 | -4.26 | -2.21 | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| |  | | --- | | -6 | | 1 | | 7 | | 2 | | 4 | | 5 | | 5 | | -8 | | -7 | | -7 |  |  | | --- | | 136.14 | | 45.75 | | -94.26 | | 49.41 | | -84.98 | | 127.39 | | -48.44 | | -25.81 | | 78.45 | | -35.97 | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Видно, что матрица не является симметрической. Домножим систему на

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 264.992 | -78.3685 | 59.7287 | 186.648 | 21.0153 | -1.0942 | -59.1669 | -44.0819 | -61.7074 | 40.246 |
| -78.3685 | 284.428 | -116.873 | -189.499 | -115.295 | -117.917 | 126.442 | -41.6873 | 98.4742 | -79.5828 |
| 59.7287 | -116.873 | 322.823 | 185.897 | 141.941 | -122.48 | -106.574 | 17.0245 | -79.0509 | 80.129 |
| 186.648 | -189.499 | 185.897 | 362.955 | 133.756 | 31.6339 | -169.907 | 7.8805 | -244.738 | 65.4717 |
| 21.0153 | -115.295 | 141.941 | 133.756 | 234.154 | 105.518 | 21.0753 | 42.3902 | -96.3808 | 26.3767 |
| -1.0942 | -117.917 | -122.48 | 31.6339 | 105.518 | 359.688 | 31.2186 | 33.9447 | -147.097 | -44.9414 |
| -59.1669 | 126.442 | -106.574 | -169.907 | 21.0753 | 31.2186 | 302.518 | -105.49 | 141.617 | 126.765 |
| -44.0819 | -41.6873 | 17.0245 | 7.8805 | 42.3902 | 33.9447 | -105.49 | 330.905 | -52.281 | -240.517 |
| -61.7074 | 98.4742 | -79.0509 | -244.738 | -96.3808 | -147.097 | 141.617 | -52.281 | 374.38 | 31.0657 |
| 40.246 | -79.5828 | 80.129 | 65.4717 | 26.3767 | -44.9414 | 126.765 | -240.517 | 31.0657 | 327.479 |

|  |
| --- |
| -591.283 |
| -659.767 |
| 1435.06 |
| 1753.28 |
| 2740.21 |
| 2543.87 |
| 113.841 |
| -428.083 |
| -3406.91 |
| 299.741 |

## Метод простых итераций:

1. Построить стандартную программу для решения системы методом простых итераций для числа уравнений с заданной точностью .
2. Решить систему с помощью этой программы и получить . Останавливать итерационный процесс при выполнении неравенства .
3. Сравнить полученное итерационное приближение с вектором точного решения .
4. Определить число итераций

## Метод релаксации:

1. Построить стандартную программу для решения системы методом релаксации для числа уравнений с заданной точностью .
2. Решить систему с помощью этой программы при значении параметра с шагом 0,1. Останавливать итерационный процесс при выполнении неравенства .
3. Привести решение при (метод Зейделя).
4. Построить график зависимости числа итераций от параметра .
5. Определить отрезок, который содержит , и уточнить дроблением отрезка.

# Краткая теория

Имеем систему уравнений , где – невырожденная матрица, т.е.

:

Матрица общего вида. Приведем ее к виду следующим образом:

Далее .

Решая систему методом простых итераций, приводим ее к каноническому виду , где . Так как матрица симметричная и положительно определенная, т.е., то элементы матрицы и вектора вычисляются следующим образом:

E – единичная матрица.

Матрица

Выбрав в качестве начального итерационного приближения вектор ,

находим -ое приближение по формуле:

Останавливаем итерационный процесс при выполнении неравенства .

Решая систему методом релаксации, приводим ее к каноническому виду , где

Выбрав в качестве начального итерационного приближения вектор , в качестве параметра число из промежутка

находим -ое приближение по формуле:

Останавливаем итерационный процесс при выполнении неравенства .

Оптимальное значение найдем следующим образом:

# Листинг программы

Программа выполнена на языке программирования C++, в среде Microsoft Visual Studio Community 2015.

#include "resources.h"

int main(int argc, char argv[]) {

setlocale(LC\_ALL, ".1251");

const int n = 10;

try {

ifstream fin("input.txt");

pair<matrix<double>, vector<double>> buff = create(n, fin);

matrix<double> A(buff.first);

vector<double> xSource(buff.second);

fin.close();

ofstream fout("output.csv", ios\_base::trunc);

fout << "матрица A:" << endl;

print(A, fout);

fout << "\n\nвектор x:" << endl;

print(xSource, fout);

vector<double> f = prod(A, xSource);

fout << "\n\n\nвектор правой части f:" << endl;

print(f, fout);

fout << "\n\n\nдомножим A слева на А транспонированную:" << endl;

print(A = prod(trans(A), buff.first), fout);

fout << "\n\nизменённая правая часть:" << endl;

print(f = prod(trans(buff.first), f), fout);

matrix<double> B(identity\_matrix<double>(n) - A / norm\_1(A));

fout << "\n\nматрица В:" << endl;

print(B, fout);

vector<double> g(f / norm\_1(A));

fout << "\n\nвектор g:" << endl;

print(g, fout);

double eps = pow(10, -7);

vector<double> xNext(g.size()), x(g);

size\_t k = 0;

while (true) {

k++;

xNext = prod(B, x) + g;

if (norm\_1(xNext - x) <= eps)

break;

x = xNext;

}

fout << "\n\nвектор x:" << endl;

printf(xNext, fout);

fout << "\n\nвектор x(исходный):" << endl;

print(xSource, fout);

fout << "\n\nколичетво итераций:\n " << k << endl;

fout << "\n\n!!метод релаксации!!\n\n";

for (size\_t i(0); i < B.size1(); i++) {

for (size\_t j(0); j < B.size2(); j++)

if (i == j)

B(i, j) = 0;

else

B(i, j) = -A(i, j) / A(i, i);

g(i) = f(i) / A(i, i);

}

fout << 'q' << separator << 'k' << endl;

for (double q = 0.1; q < 2.0; q += 0.1)

fout << q << separator << relaxation\_method(B, g, q, eps) << endl;

fout << "\nуточняем q:\n" << 'q' << separator << 'k' << endl;

for (double q = 1.8; q < 2.0; q += 0.01)

fout << q << separator << relaxation\_method(B, g, q, eps) << endl;

double q = 1.0;

x = g;

while (true) {

for (size\_t i(0); i < x.size(); i++) {

double temp = 0.0;

for (size\_t j(0); j < i; j++)

temp += B(i, j)\*xNext(j);

for (size\_t j(i + 1); j < x.size(); j++)

temp += B(i, j)\*x(j);

xNext(i) = (1.0 - q)\*x(i) + q\*(temp + g(i));

}

if (norm\_1(xNext - x) <= q\*eps)

break;

x = xNext;

}

fout << "\n\nвектор x:" << endl;

printf(xNext, fout);

fout << "\n\nвектор x(исходный):" << endl;

print(xSource, fout);

fout.close();

}

catch (exception& e) { cerr << e.what() << endl; }

return 0;

}

size\_t relaxation\_method(matrix<double> B, vector<double> g, const double q, const double eps) {

vector<double> x(g), xNext(g.size());

for (size\_t k = 1;; k++) {

for (size\_t i(0); i < x.size(); i++) {

double temp = 0.0;

for (size\_t j(0); j < i; j++)

temp += B(i, j)\*xNext(j);

for (size\_t j(i + 1); j < x.size(); j++)

temp += B(i, j)\*x(j);

xNext(i) = (1.0 - q)\*x(i) + q\*(temp + g(i));

}

if (norm\_1(xNext - x) <= q\*eps)

return k;

x = xNext;

}

}

# Результаты

Применив метод простых итераций, получили следующее итерационное приближение:

|  |
| --- |
| -5.9994914944822 |
| 1.0016364244707 |
| 6.9995033923640 |
| 1.9992925890659 |
| 4.0010724344855 |
| 5.0005631181807 |
| 4.9980705975496 |
| -7.9989210734841 |
| -6.9997103963129 |
| -6.9978990664571 |

|  |
| --- |
| -6 |
| 1 |
| 7 |
| 2 |
| 4 |
| 5 |
| 5 |
| -8 |
| -7 |
| -7 |

Точность достигнута на 806145 итерации.

|  |
| --- |
| -6 |
| 1 |
| 7 |
| 2 |
| 4 |
| 5 |
| 5 |
| -8 |
| -7 |
| -7 |

Применив метод релаксации для различных значений параметра , получили следующее итерационное приближение при значении параметра :

|  |
| --- |
| -5.9999505160255 |
| 1.0001591031482 |
| 6.9999517080069 |
| 1.9999311423098 |
| 4.0001042867221 |
| 5.0000547371359 |
| 4.9998123914882 |
| -7.9998950722662 |
| -6.9999718833646 |
| -6.9997957024230 |

График зависимости числа итераций k от q

Уточним дроблением: